

**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LAS OPCIONES AL
REASEGURO.**

Eva M^a del Pozo García
Economía Financiera y Contabilidad I
Facultad de C.C. Economicas y Empresariales
U.C.M.

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LAS OPCIONES AL REASEGURO.

Sumario

I.- Introducción. II.- El reaseguro. Modalidades no proporcionales III.- Aplicación de la teoría de Opciones a las modalidades no proporcionales de reaseguro. IV.- Conclusiones. V.- Bibliografía.

1.- INTRODUCCION

El reaseguro es uno de los instrumentos fundamentales de que dispone la empresa aseguradora para adaptar la estructura de riesgos asumidos a su capacidad financiera.

Mediante el reaseguro es posible trasladar la totalidad o aquella parte de los riesgos asumidos que pueden dar lugar a una siniestralidad que ponga en peligro la solvencia de la empresa. Supone por tanto una reducción del riesgo por que se paga un precio: *la prima de reaseguro*. Lo cual también, lógicamente implica una reducción del beneficio esperado.

De forma resumida la toma de decisiones en relación con el reaseguro supone la elección entre distintas modalidades y plenos por lo que el asegurador puede conseguir un equilibrio cuantitativo y cualitativo de su cartera con la consiguiente estabilización de sus resultados e incremento de sus niveles de solvencia.

Una adecuada utilización del reaseguro puede ayudar a amortiguar las fluctuaciones elevadas de la siniestralidad. La elección adecuada de la modalidad y pleno de reaseguro de acuerdo a las características de los distintos ramos en que se opera, puede garantizar en gran medida la capacidad de la empresa para hacer frente a sus obligaciones.

En este artículo se tratan en primer lugar, muy brevemente, las modalidades de reaseguro, centrándonos en las no proporcionales, excess loss (XL) y stop loss, estudiando la variación de la distribución de la siniestralidad antes y después del reaseguro. En segundo lugar, dadas sus similitudes, trata de la aplicación de la teoría de

opciones al contrato de reaseguro, para finalmente, mediante la aplicación de esta teoría obtener la prima de un contrato de reaseguro.

2.- EL REASEGURO. MODALIDADES NO PROPORCIONALES.

Como ya hemos dicho en la introducción en mediante el reaseguro el asegurador directo traslada la totalidad o parte de los riesgos asumidos a la compañía reaseguradora.

La compañía que transfiere el riesgo se denomina “cedente” y la que lo asume “aceptante”. La parte de riesgo transferida se denomina cesión y la parte no cedida pleno de retención o simplemente pleno.

Cuando ocurre un siniestro, el responsable en su totalidad frente al asegurado es el asegurador directo, que luego se encargará de repercutir la parte correspondiente al reasegurador de acuerdo a las condiciones del contrato.

Las funciones del reaseguro son:

- Desde el punto de vista técnico
 - (1) Ayuda a conseguir la homogeneidad cuantitativa y cualitativa de la cartera.
 - Cualitativa: Aquellos riesgos que suponen mayor peligrosidad pueden ser objeto de una mayor cesión. Se compensan los diferentes tipos de riesgos a través de los diferentes ramos.
 - Cuantitativa: Los riesgos que exceden la capacidad financiera de la empresa (pleno de retención) son cedidos.
 - (2) El reaseguro puede ofrecer una serie de ventajas técnicas y administrativas para compañías que empiezan a trabajar y que por tanto no tienen experiencia en un ramo determinado.
- Desde el punto de vista financiero y económico

El reaseguro permite aumentar el número de riesgos contratados por parte de las entidades aseguradoras, puesto que se encuentran respaldadas por los reaseguradores, lo cual eleva su capacidad financiera.

Las modalidades de reaseguro, según las características técnicas del contrato son:

(a).- Reaseguro proporcional:

La cesión es proporcional al riesgo asumido por la cedente. También son proporcionales las primas y los siniestros ocurridos.

En esta modalidad existen tres formas de contrato de reaseguro:

- Cuota parte
- Excedente
- Mixto

(b).- Reaseguro no proporcional:

En este caso el reasegurador recibe la prima y a cambio asume aquellos siniestros que reúnan unas determinadas características.

En esta modalidad tenemos dos formas de contrato:

- Excess-loss (XL):
 - por riesgo
 - por siniestro
 - De catástrofe
- Stop-loss

En este artículo solamente nos dedicaremos al estudio de las modalidades de reaseguro no proporcionales comparando su funcionamiento con el de las opciones.

El reaseguro no proporcional es un acuerdo por el que el reasegurador se obliga a compensar a la cedente el importe de los siniestros que excedan una cierta cantidad o un porcentaje estipulados, que corre a cargo de la cedente. Por tanto, la responsabilidad no tiene relación o no está en proporción con las primas, sino que obedece a los acuerdos pactados entre la cedente y el reasegurador sobre su participación en el importe de los siniestros.

2.1- Reaseguro Excess-loss:

En esta modalidad el reasegurador a cambio de la prima de reaseguro, asume aquella parte de cada siniestro que supera una determinada cantidad, denominada prioridad, es decir, cubre lo que supera el pleno por siniestro fijado por la cedente.

En esta modalidad, la cedente fija su retención en forma de una cantidad deducible por siniestro. Esta cantidad puede fijarse por:

- Por riesgo, por siniestro, en el caso de que se pretenda cubrir varios riesgos afectados por un solo siniestro.
- De catástrofe, cuando un mismo siniestro pueda afectar a un número indeterminado de riesgos en un área territorial amplia.

Siendo M es la prioridad, si ocurre un siniestro de cuantía X, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Si } X < M & \quad \begin{cases} \text{La cedente paga:} & X \\ \text{El reasegurador paga:} & 0 \end{cases} \\ \\ \text{Si } X \geq M & \quad \begin{cases} \text{La cedente paga:} & M \\ \text{El reasegurador paga:} & X - M \end{cases} \end{aligned}$$

Así se modifica la distribución de la siniestralidad de la siguiente forma:

- Distribución de la siniestralidad antes del reaseguro:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cdot V^{*(n)}(x)$$

donde:

P(n) es el número de siniestros

$V^{*(n)}$ es la cuantía de un siniestro.

- Distribución de la siniestralidad después del reaseguro:

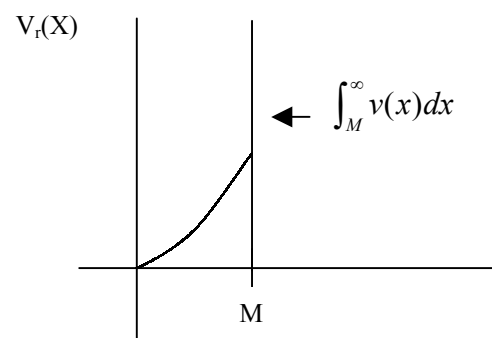
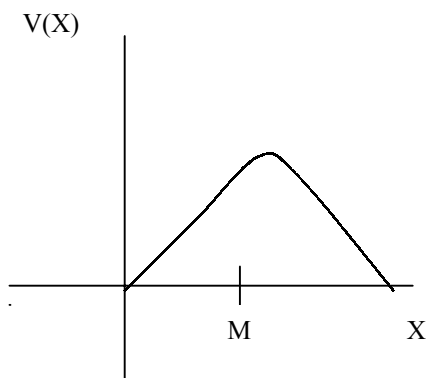
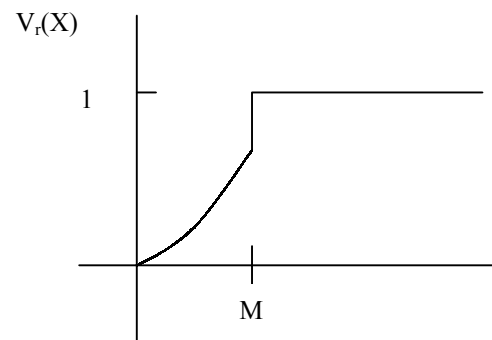
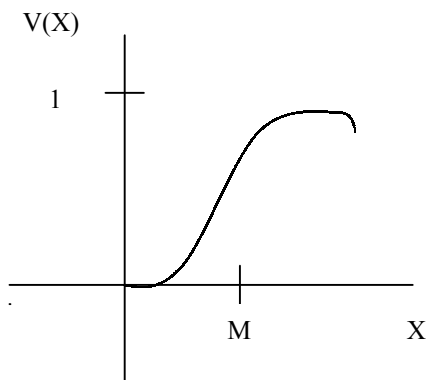
$$F_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cdot V_r^{*(n)}(x)$$

donde:

$V_r^{*(n)}$: es la nueva cuantía del siniestro después del reaseguro.

$$V_r(X) = \begin{cases} V(X) & \text{si } X < M \\ 1 & \text{si } X \geq M \end{cases}$$

$$v_r(X) = \begin{cases} v(X) & \text{si } X < M \\ \int_M^{+\infty} v(X) dx & \text{si } X = M \\ 0 & \text{si } X > M \end{cases}$$



Los momentos antes y después de la siniestralidad retenida son:

Si la distribución del número de siniestros es Poisson Compuesta:

$$P(n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

donde:

$$E(X) = \lambda C_1$$

$$\sigma^2(X) = \lambda C_2$$

son los momentos de orden 1 y 2 antes del reaseguro.

Después del reaseguro tenemos:

$$E_r(X) = \lambda C_{1r}$$

$$\sigma_r^2(X) = \lambda C_{2r}$$

donde:

$$C_{1r} = \int_0^{+\infty} x dV_r(x) = \int_0^M x dV(x) + M \int_M^{+\infty} dV(x)$$

$$C_{2r} = \int_0^{+\infty} x^2 dV_r(x) = \int_0^M x^2 dV(x) + M^2 \int_M^{+\infty} dV(x)$$

2.2.- El Reaseguro Stop-Loss.

A diferencia del reaseguro Excess-Loss que pretende la cobertura de una serie de siniestros individuales, el reaseguro Stop-Loss pretende hacer frente a una desviación de la siniestralidad en su conjunto, se trata, pues, de una protección contra la frecuencia y la intensidad de los siniestros de forma simultánea.

El límite del contrato de reaseguro consiste en un tanto por ciento de la siniestralidad a primas.

Está especialmente indicado para cartera sujetas a una siniestralidad cíclica, de riesgos de la naturaleza y constituye la modalidad tradicional del reaseguro de riesgos de cosechas.

El reasegurador paga el exceso de siniestralidad total sobre el pleno de retención de una determinada cartera.

El pleno de retención se puede establecer de dos formas:

- De modo absoluto: determinando la cantidad a partir de la cual comenzará la contribución del reasegurador.
- De modo relativo: Estableciendo un porcentaje del volumen de primas de la cartera por medio del cual se determinará el comienzo de la contribución del reasegurador.

Se suele determinar también un límite máximo para la siniestralidad total, a partir del cual, la responsabilidad de los daños vuelve de nuevo a la compañía cedente, en este caso el reasegurado puede contratar un nuevo reaseguro de segundo excedente de siniestralidad.

Es posible también establecer que el reasegurador soporte una parte alícuota de todo el siniestro.

Este contrato se utiliza fundamentalmente en aquellos seguros en los que no resulta fácil la determinación de lo que constituye un siniestro, que es el factor fundamental de los otros reaseguros.

También se emplea para el reaseguro de mutualidades con el fin de evitar a los mutualistas derramas suplementarias sobre las primas provisionalmente pagadas.

En este caso la distribución de la siniestralidad se modifica de la siguiente forma:

- Distribución de la siniestralidad antes del reaseguro:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cdot V^{*(n)}(x)$$

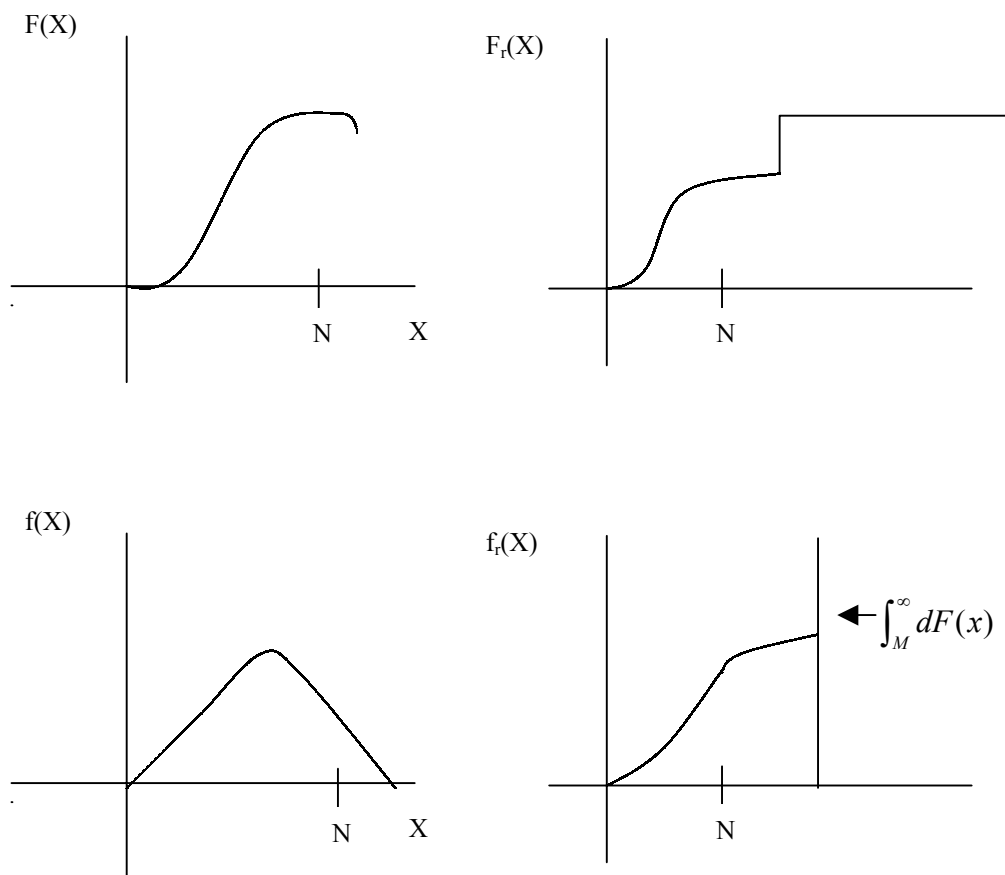
- Distribución de la siniestralidad después del reaseguro:

$$F_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cdot V_r^{*(n)}(x)$$

donde:

$V_r^{*(n)}$: es la nueva cuantía del siniestro después del reaseguro.

$$F_r(X) = \begin{cases} F(X) & \text{si } X < N \\ 1 & \text{si } X \geq N \end{cases}$$



Los momentos después de la siniestralidad retenida son:

$$\begin{aligned}
 E_r(x) &= \int_0^{+\infty} x dF_r(x) = \int_0^N x dF(x) + N \int_N^{+\infty} dF(x) \\
 E_r(x^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 dF_r(x) = \int_0^N x^2 dF(x) + N^2 \int_N^{+\infty} dF(x) \\
 \sigma^2(x) &= E_r(x^2) - E_r(x)^2
 \end{aligned}$$

3.- APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE OPCIONES A LAS MODALIDADES NO PROPORCIONALES DE REASEGURO.

Vamos a desarrollar una aproximación diferente sobre la valoración del seguro.

El precio competitivo para un asegurador es aquel que le proporciona una tasa de retorno competitiva o de mercado. Si los contratos de seguros se vendieran a este precio, la tasa esperada de rendimiento sobre el capital sería la adecuada en un mercado

competitivo. Este mismo planteamiento podría ser también atractivo en la valoración del reaseguro ya que la tasa de retorno podría ser considerada como “justa” tanto para la compañía cedente como para el reasegurador. Pero en este contexto, también, podría encontrarse con dificultades operativas en la estimación de los betas actuariales o factores de riesgo. Teniendo en cuenta estas dificultades operacionales esbozaremos una aproximación diferente para la valoración en seguros que mantiene las ventajas teóricas de CAPM y ATP, pero sin embargo los problemas de estimación podrían ser menos severos.

Los derivados (opciones y futuros), como su nombre indica, existen solamente en relación con otros. Un ejemplo puede ser una “opción de compra”, también denominada “call” suscrita sobre una mercancía. Esta opción es el derecho a comprar, pero no implica la obligación. Para comprar la mercancía ha de reunir unas condiciones, estas condiciones especifican el momento en el que el tenedor de la opción puede ejercer la compra y el precio al que la mercancía se va a comprar. El tenedor de la opción ejercerá la misma cuando en el momento del vencimiento el precio de mercado supere al precio de ejercicio, obteniendo así un beneficio, que se realizará de la siguiente forma:

$$\text{Max}(S - E, 0)$$

Es decir:

$$\text{Beneficio} = \begin{cases} S - E & \text{si } S > E \\ 0 & \text{si } S \leq E \end{cases}$$

donde :

- S es el precio en la fecha de ejercicio del activo subyacente o mercancía sobre la que se ejerce la opción.
- E es el precio de ejercicio de la opción. También llamado Strike

Otra opción alternativa es la “opción de venta”, también llamada “put” con unas condiciones pactadas. En este caso el tenedor de la opción es que tiene el derecho de vender o no el activo subyacente, mientras que la otra parte tiene la obligación de comprarlo si éste decide vender. La liquidación y por consiguiente el beneficio de esta opción será:

$$\text{Max}(E - S, 0)$$

Es decir :

$$\text{Beneficio} = \begin{cases} S - E & \text{si } S < E \\ 0 & \text{si } S \geq E \end{cases}$$

En ambos casos el tenedor de la opción no se encuentra obligado a comprar o vender, mientras que el vendedor de la misma si que tiene la obligación, por ello las opciones tienen un valor y deberían venderse al precio adecuado. Existe una extensa literatura sobre la valoración de opciones empleando fórmulas de valoración. El modelo más importante fue el desarrollado por Black y Scholes en 1973.

La idea fundamental del modelo es que si un inversor puede continuamente mantener una perfecta cobertura (es decir una cartera libre de riesgo) mediante el uso de opciones, manteniendo activos y prestando y pidiendo prestado sin riesgo, es decir que su cartera puede repartirse al tipo de interés libre de riesgo en un mercado de capitales que funcione correctamente. A través de esta propuesta, el valor de una opción puede obtenerse si los precios de los activos usados para formar una cobertura libre de riesgo son conocidos. La obtención requiere que la distribución del precio del activo subyacente sea log-normal. De este modo el precio de la opción según Black y Scholes se obtiene de la siguiente manera:

$$P_0 = P_s N(d_1) - X e^{-rt} N(d_2)$$

donde:

$N(\cdot)$ = Función de distribución normal (0,1)

P_s = precio actual del activo subyacente.

X = Precio de ejercicio.

r = tipo de interés sin riesgo.

t = tiempo hasta el vencimiento.

$$d_1 = \frac{\log(P_s / X) + (r + 0,5\sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t}$$

σ = desviación típica.

Un planteamiento muy diferente para la valoración de opciones fue el desarrollado por Rubinstein (1976) y extendido por otros escritores como Brennan (1979) y Stapleton y Subrahmanyam (1984). La fórmula de valoración de B-S requiere un continuo comercio de los activos requeridos para lograr la cobertura, así como mantiene unos supuestos muy fuertes para que no exista posibilidad de arbitraje. Muchos activos estarían mejor valorados en tiempo discreto ya que no se comercializan continuamente sino de forma intermitente. Debido a estos se desarrolló el modelo de valoración de opciones en tiempo discreto. Rubinstein y otros han mostrado que si los inversores tienen ciertas funciones de utilidad y se suponen unas distribuciones de probabilidad, el precio de una opción se puede obtener a través del valor de activo subyacente sin riesgo incluyendo la prima en el precio del derivado. Esto se conoce como una relación de valoración con riesgo neutral. Un ejemplo puede ser la constante aversión al riesgo absoluto y comportamiento normal.

3.1.- Aplicación al Reaseguro Stop-Loss.

El reaseguro Stop-Loss, tratado brevemente al inicio del artículo, puede ser formulado en términos de teoría de opciones. Consideremos el siguiente contrato stop-loss, sobre la siniestralidad total de una compañía aseguradora, L , (activo subyacente en este caso) durante un período de tiempo, por ejemplo, un año. Al final del período especificado, si la siniestralidad supera el pleno de retención M (precio de ejercicio), es decir, si $L > M$, el reasegurador pagará la proporción α ($0 < \alpha < 1$) de los siniestros hasta un límite R donde el asegurador primario de nuevo se convierte en el responsable del 100% de la siniestralidad. Por tanto la obligación del reasegurador es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} L_R = 0 & \text{si } L \leq M \\ L_R = \alpha (L - M) & \text{si } M < L < R \\ L_R = \alpha (R - M) & \text{si } L \geq R \end{array}$$

donde L_R es la siniestralidad a cargo del reasegurador. La obligación de siniestralidad del reasegurador al final del período puede también escribirse así:

$$\alpha (\text{Max} [L - M , 0] - \text{Max} [L - R , 0])$$

Por lo tanto la obligación que iguala el coste del contrato de reaseguro es la diferencia entre dos opciones de compra sobre la siniestralidad, variable aleatoria L, con precio de ejercicio M y R respectivamente.

3.2.- Aplicación al reaseguro Excess-Loss

Como otra aplicación de la teoría de opciones al seguro es el caso del reaseguro excess-loss que puede ser considerado como una opción de compra.

Por ejemplo una compañía cede una parte de un siniestro en un contrato excess-loss sin límite superior, en este caso el reasegurador pagará:

$$\text{Max} (Y - M, 0)$$

donde:

- Y es la cuantía del siniestro
- M es la prioridad o pleno de retención.

Por tanto la cuantía que deberá desembolsar el reasegurador será:

$$\begin{cases} Y - M & \text{si } Y \geq M \\ 0 & \text{si } Y < M \end{cases}$$

La compañía cedente compra, por tanto, una opción de compra sobre la cuantía del siniestro con precio de ejercicio M. Si la póliza tienen un límite superior (U), esto es considerado como una opción de compra suscrita por la compañía cedente a favor del reasegurador.

El valor neto del reaseguro es:

$$\text{Max} (Y - M, 0) - \text{Max} (Y - U, 0).$$

La valoración de la call de reaseguro muestra importantes hechos de la teoría de valoración de opciones. Para aplicar el modelo de opciones convencional a la valoración

del reaseguro es necesario suponer que la evolución de las obligaciones del reaseguro siguen una tendencia suave de tal forma que se puede utilizar un proceso de difusión. Otro supuesto es que la contratación se produce de forma continua en el tiempo. Estos supuestos podrían ser aproximados mediante un reaseguro stop-loss o mediante pólizas de cobertura múltiple.

Si “Y” es la siniestralidad de la póliza, el valor del reaseguro se puede escribir como una función:

$$C(Y, T, M, \sigma, r)$$

donde como antes:

$$C(Y, T, M, \sigma, r) = \text{Max} (0, Y - M)$$

La cartera cubierta es

$$\pi = (1 - w) Y + wC$$

donde w es la parte de la cartera asignada a la opción.

Otra cartera que se emplea es la cartera replicada, que es la combinación de bonos sin riesgo y otros activos que simulan la opción. Esto se obtiene fácilmente con la cartera cubierta anterior:

$$C = \pi / w - [(1 - w)/w] Y$$

donde P indica la parte de la cartera compuesta por bonos sin riesgo.

La variable w es tal que $C_Y(Y, t) = N(d_1)$, es decir es la derivada parcial del valor de la opción con respecto a Y, por tanto, *w es el ratio de cobertura o delta de la opción*, esto es la proporción en que varía el precio teórico de la opción cuando varía el precio del activo subyacente, en este caso el valor de la siniestralidad, permaneciendo constantes el resto de las variables o lo que es lo mismo la elasticidad del valor de la opción respecto a la siniestralidad.

En el caso del reaseguro la cartera replicada podría implicar vender seguro (ya que el coeficiente $Y < 0$) y comprar bonos. Esto podría verse como un sustituto de comprar reaseguro. La dificultad de interpretación es suponer que las proporciones que componen la cartera serán continuamente reajustadas. Esto implica un movimiento frecuente de pólizas aseguradas, que sería difícil de realizar.

Afortunadamente, también se dispone de modelos de cobertura tiempo discreto para evitar este supuesto de continuo movimiento de pólizas. Un modelo de tiempo discreto ha sido aplicado al problema del seguro por Doherty y Garven (1986).

4.- CONCLUSIONES

Obviamente, se requieren más datos que para los modelos actuariales de primas clásicas. Tales modelos utilizan solamente datos relacionados con la distribución de siniestralidad. Pero existen argumentos de que estos modelos no están fundamentados en la racionalidad económica. Los datos adicionales requeridos para el modelo actual son bastante modestos y de fácilmente accesibles. Probablemente lo más complicado de los datos necesarios está en la estimación de la desviación típica de la siniestralidad L . Pero esto también es necesario para los modelos actuariales. Irónicamente, el modelo no especifica el valor esperado de L , pero si debería estar reflejado en el precio de contrato directo P .

Este planteamiento de la valoración de opciones aplicado al reaseguro permite la consideración de datos financieros relacionados. El modelo ha sido diseñado para proporcionar al reasegurador una tasa de rendimiento competitiva sobre sus capitales libres en relación a las pólizas reaseguradas. Esto permite al reasegurador un rendimiento adecuado que mantendrá su distribución de capital. Pero este rendimiento no es excesivo, no es la rentabilidad de un monopolio. Tal precio puede ser considerado como el de mercado tanto para la compañía cedente como para el reasegurador. Para obtener este rendimiento consideramos datos financieros apropiados y la corriente de flujos de caja. El modelo implícitamente tiene en cuenta los ingresos por inversiones a través del coeficiente generador de fondos k . También están incluidos las obligaciones impositivas del reasegurador y protege los impuestos sobre los ingresos por inversiones. El modelo está adaptado para el apalancamiento del reasegurador (ratio primas/ capitales libres). El precio de reaseguro obtenido no es constante a lo largo del tiempo sino que varía con los tipos de interés. Debería estar claro que en modelos anteriores como el CAPM y ATP los precios competitivos tampoco son constantes, ya que varían de acuerdo a los cambios en los tipos de interés del mercado de capitales debido a que los costes de oportunidad de contrato de reaseguro, tanto para el

asegurador como para el asegurado, cambian según las variaciones del dinero a lo largo del tiempo.

El modelo anteriormente desarrollado es suficiente para ilustrar las posibilidades del uso de los modelos de valoración de opciones para valorar los contratos de reaseguro. Si consideramos un tipo específico de contrato de reaseguro, un contrato excess of loss sobre la cartera directa del asegurador como un único contrato, en este caso el supuesto de normalidad podría no ser válido. Sin embargo, podría ser razonable aproximarlos con modelos basados en una distribución log-normal bien en tiempo discreto o bien en tiempo continuo. Desafortunadamente, el modelo de opciones no está disponible para toda la gama de formas de distribuciones empleadas por los actuarios para describir las siniestralidades futuras. El uso de los modelos de opciones requiere que sea crudamente aproximado a la distribución normal o log-normal. Tal aproximación incorpora la racionalidad económica en el precio del seguro.

5.- BIBLIOGRAFIA.

- Cummnis, J. David. 1988. "Risk-based Premiums for Insurance Guaranty Funds". *Journal of Finance*. Vol XLIII, nº 4 Págs: 823-839.
- Cummnis, J. David. 1990. "Property-Liability Insurance Pricing Models: An Empirical Evaluation". *Journal of Risk and Insurance*. Vol LVII, nº 3 Págs: 391-430.
- Cummnis, J. David. 1990 "Multi-period Discounted Cash Flow Ratemaking Models In Property-Liability Insurance". *Journal of Risk and Insurance*. Vol LVII, Págs: 79-109.
- Cummnis, J. David. 1990 "Asset Pricing Models and Insurance Ratemaking". *Astin Bulletin*. nº 20, Págs: 125-166.
- Cummnis, J. David. 1991. "Statistical and financial Models of Insurance Pricing and the insurance firm". *Journal of Risk and Insurance*. Págs: 260-302.
- D'arcy, Stephen and Doherty, Neil, 1988. "The Financial Theory of pricing Property-Liability Insurance Contracts". *Philadelphia: S.S. Huebner Foundation*

- D'arcy, Stephen and Dyer, Michael, 1997. "Ratemaking: A Financial Economics Approach". *Casualty Actuarial Society*. Págs: 301-390.
- Doherty, Neil and Garven, James. 1986. "Price Regulation in Property-Liability Insurance: A Contingent-Claims Approach". *Journal of Finance*. Vol XLI. nº 5. Págs: 1031-1050.